第 3 节 简单的比较指、对数大小问题（★★☆）

强化训练

类型Ⅰ：估算法比较大小

1.（2023·浙江模拟·★★）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_{0.7} 2$，$c=5^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

答案：B

解析：由题意，$a>0$，$c>0$，$b<0$，所以 b 最小，

要比较 a，c，可再看它们与 1 的大小，

因为 $a=\log_3 4>\log_3 3=1$，$c=5^{-0.1}<5^0=1$，

所以 $a>c$，故 $a>c>b$.

2.（2023·天津南开二模·★★）已知 $a=2^{0.2}$，$b=1-2\lg 2$，$c=2-\log_3 10$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

（A）$b>c>a$　　（B）$a>b>c$　　（C）$a>c>b$　　（D）$b>a>c$

答案：B

《一数•高考数学核心方法》

解析：由题意，$a=2^{0.2}>0$，$b=1-2\lg 2=1-\lg 4>0$，

$\log_3 10>\log_3 9=2\Rightarrow c=2-\log_3 10<0$，所以 c 最小，

要再比较 a 和 b，可看看它们与 1 的大小，

$a=2^{0.2}>2^0=1$，因为 $0=\lg 1<\lg 4<\lg 10=1$，

所以 $b=1-\lg 4\in(0,1)$，从而 $a>b$，故 $a>b>c$.

3.（2022·重庆模拟·★★）$a=\log_3\dfrac{1}{2}$，$b=\log_2\dfrac{1}{3}$，$c=3^{-0.1}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$c>b>a$　　（B）$c>a>b$　　（C）$a>c>b$　　（D）$a>b>c$

答案：B

解析：显然 $a<0$，$b<0$，$c>0$，所以 c 最大，要比较 a 和 b，可以看看它们与常用数据 -1 的大小，若不行就再进行更精确的估计，

$a=\log_3\dfrac{1}{2}=-\log_3 2$，因为 $0<\log_3 2<1$，所以 $-1<a<0$；

$b=\log_2\dfrac{1}{3}=-\log_2 3$，因为 $\log_2 3>1$，所以 $b<-1$，故 $c>a>b$.

4.（2023·全国模拟·★★）已知 $a=3^{-2}$，$b=2^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_2 5$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

答案：A

解析：观察发现 a，b，c 均为正数，故可再看它们与 1，2 的大小，

因为 $0<3^{-2}<3^{0}=1$，所以 $0<a<1$，因为 $2^{0}<2^{\frac{1}{3}}<2^{1}$，所以 $1<b<2$，

因为 $\log_2 4<\log_2 5<\log_2 8$，所以 $2<c<3$，故 $a<b<c$.

5.（2015·山东卷·★★）设 $a=0.6^{0.6}$，$b=0.6^{1.5}$，$c=1.5^{0.6}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$a<c<b$　　（C）$b<a<c$　　（D）$b<c<a$

答案：C

解析：a，b 同底，可用指数函数单调性比较，a，c 同指，可用幂函数单调性比较，

$y=0.6^{x}\searrow\Rightarrow 0.6^{1.5}<0.6^{0.6}\Rightarrow b<a$，$y=x^{0.6}$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $\nearrow\Rightarrow 0.6^{0.6}<1.5^{0.6}\Rightarrow a<c$，所以 $b<a<c$.

6.（2022·安徽模拟·★★★）已知 $a=\log_3 4$，$b=\log_5 9$，$c=\dfrac{4}{3}$，则（　　）

（A）$a<b<c$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<c<b$

答案：D

解析：题干专门给了个 $c=\dfrac{4}{3}$，可能是中间量的提示，我们就把 a 和 b 跟 c 比较一下，看能不能选出答案，

因为 $c=\dfrac{4}{3}=\log_3 3^{\frac{4}{3}}$，所以要比较 a 和 c 的大小，只需比较 4 和 $3^{\frac{4}{3}}$ 的大小，可将它们同时立方，

因为 $4^{3}=64<(3^{\frac{4}{3}})^{3}=3^{4}=81$，所以 $4<3^{\frac{4}{3}}$，从而 $\log_3 4<\log_3 3^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}$，故 $a<c$；

又 $\dfrac{4}{3}=\log_5 5^{\frac{4}{3}}$，所以要比较 b 和 c 的大小，只需比较 9 和 $5^{\frac{4}{3}}$ 的大小，

因为 $9^{3}=729>(5^{\frac{4}{3}})^{3}=5^{4}=625$，所以 $9>5^{\frac{4}{3}}$，从而 $\log_5 9>\log_5 5^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}$，故 $b>c$，所以 $a<c<b$.

7.（2023·陕西榆林模拟·★★★）已知 $a=\log_3\sqrt{2}$，$b=0.3^{0.5}$，$c=0.5^{-0.2}$，则（　　）

（A）$c<b<a$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<c<a$

答案：C

解析：观察发现 a，b，c 都大于 0，故尝试将它们与 1 比较，

$a=\log_3\sqrt{2}<\log_3 3=1$，$b=0.3^{0.5}<0.3^{0}=1$，$c=0.5^{-0.2}>0.5^{0}=1$，所以 c 最大，

a，b 都在 $(0,1)$ 上，不妨尝试以中点 0.5 为中间量，看能否比较出大小，

因为 $a=\log_3\sqrt{2}<\log_3\sqrt{3}=0.5$，$b=0.3^{0.5}=\sqrt{0.3}$

$>\sqrt{0.25}=0.5$，所以 $a<b$，故 $a<b<c$.

8.（2022·浙江月考·★★★）已知 $a=2^{\frac{4}{5}}$，$b=4^{\frac{2}{7}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}$，则（　　）

（A）$b<a<c$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

答案：A

解析：观察发现三个数据都在 $(1,2)$ 上，且不易比较它们与中间量 1.5 的大小，故考虑从结构入手分析，我

们发现 a，b 底数有猫腻，考虑化同底，a，c 指数有猫腻，考虑化同指，故先把它们化同底、同指，再构造指数函数和幂函数来比较，

$b=4^{\frac{2}{7}}=(2^2)^{\frac{2}{7}}=2^{\frac{4}{7}}$，函数 $f(x)=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，所以 $f(\frac{4}{7})<f(\frac{4}{5})$，从而 $2^{\frac{4}{7}}<2^{\frac{4}{5}}$，故 $b<a$；

$a=2^{\frac{4}{5}}=(2^2)^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{2}{5}}$，$c=25^{\frac{1}{5}}=(5^2)^{\frac{1}{5}}=5^{\frac{2}{5}}$，函数 $g(x)=x^{\frac{2}{5}}$

在 $(0,+\infty)$ 上↗，所以 $a<c$，故 $4^{\frac{2}{5}}<5^{\frac{2}{5}}$；所以 $b<a<c$.

9．（2022·江苏南通模拟·★★★★）已知 $a=\mathrm{e}-1$，$b=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}$，$c=4-\frac{1}{2\ln 2}$，则（　　）

（A）$b>c>a$　　（B）$a>c>b$　　（C）$c>b>a$　　（D）$c>a>b$

答案：C

答案：a，b，c 中 b 的结构特征最清晰，且观察发现 a 可以看成 $\mathrm{e}^1-\frac{1}{1}$，与 b 的结构是统一的，故考虑将 c 也化为与它们相同的结构，从而构造函数分析，

由题意，$c=4-\frac{1}{2\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln 4}-\frac{1}{\ln 4}$，设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}(x\ge 1)$，则 $a=f(1)$，$b=f(\frac{4}{3})$，$c=f(\ln 4)$，

因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上↗，

接下来比较 a，b，c 自变量的大小，显然 $\frac{4}{3}$ 和 ln4 都大于 1，故只需比较 $\frac{4}{3}$ 和 ln4，可将 $\frac{4}{3}$ 化对数来看，

《一数•高考数学核心方法》

因为 $\frac{4}{3}=\ln \mathrm{e}^{\frac{4}{3}}$，且 $(\mathrm{e}^{\frac{4}{3}})^3=\mathrm{e}^4<64=4^3$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}<4$，从而 $\frac{4}{3}<\ln 4$，故 $f(\ln 4)>f(\frac{4}{3})>f(1)$，即 $c>b>a$.